関数解析学　線形作用素の理論　講義報告[1]

２００９年1月1７日（土）　１４：００〜１６：００

Banach 空間論からの補充として、直和分解に沿った射影作用素を定義し、Banach空間 E が二つの閉部分空間に直和分解できたならば、その閉部分空間に沿った射影作用素が有界になることを、「閉グラフ定理」を用いて示した。

1　線形作用素の理論

1.1　Banach 空間論からの補充

定義 1.1 (直和). U, V を線形空間 E の線形部分空間とするとき、E が V と U との**直和**であるとは、

1. $E = U + V$
2. $U \cap V = \{0_E\}$

を満たすことである。このとき、$E = U \oplus V$ と記す。

定理 1.1. 線形空間 E の線形部分空間 U, V について、次の条件は同値である。

1. $E = U \oplus V$
2. 任意の $v \in E$ は、$v_1 \in U,\ v_2 \in V$ により、

$$v = v_1 + v_2$$

なる形に唯一通りに表現される。

上の定理の 2. により、定まる写像 $P_U(v) = v_1,\ P_V(v) = v_2$ が存在する。このとき、P_U を V **に沿った** U **の射影**、P_V を U **に沿った** V **の射影**という。

練習問題 1.1.

1. $P_U, P_V \in \mathcal{L}(E)$
2. $(P_U)^2 = P_U,\ (P_V)^2 = P_V$
3. $P_U P_V = 0_{\mathcal{L}(E)},\ P_V P_U = 0_{\mathcal{L}(E)}$
4. $P_U + P_V = I_E$

定理 1.2. 線形空間 E の線形部分空間 U が与えられているとき、$E = U \oplus W$ を満たす E の線形部分空間 W が存在する。さらに、$E = U \oplus W_1 = U \oplus W_2$ ならば、W_1 と W_2 は線形空間として同型である。

[1]数学工房　http://www.sugakukobo.com/

定義 1.2 (一般の場合の直和). $U_1, U_2, \cdots, U_n$ を線形空間 E の線型部分空間とするとき、

$$E = U_1 \oplus U_2 \oplus \cdots \oplus U_n = \bigoplus_{j=1}^{n} U_j$$

であるとは、

1. $E = \sum_{j=1}^{n} U_j$
2. $U_k \cap \sum_{j \neq k} U_j = \{0_E\}$

を満たすことである。

定理 1.3. 線型空間 E の線型部分空間 $U_1, U_2, \cdots, U_n$ について、次の条件は同値である。

1. $E = \bigoplus_{j=1}^{n} U_j$
2. 任意の $v \in E$ は、$v_j \in U_j \ (j = 1, 2, \cdots n)$ により、

$$v = v_1 + v_2 + \cdots + v_n = \sum_{j=1}^{n} v_j$$

なる形に唯一通りに表現される。

上の定理の 2. により、定まる写像 $P_j(v) = v_j \ (j = 1, 2, \cdots, n)$ が存在する。このとき、P_k を $\bigoplus_{j \neq k} U_j$ **に平行な** U_k **への射影（作用素）**という。

練習問題 1.2. $E = \bigoplus_{j=1}^{n} U_j$ が与えられているとき、$P_1, P_2, \cdots, P_n \in \mathcal{L}(E)$ が一組存在し、

P1). $Im \ \ P_k = U_k, \quad Ker \ P_k = \bigoplus_{j \neq k} U_j$

P2). $(P_k)^2 = P_k, \quad P_j P_k = 0_{\mathcal{L}(E)}, \quad \sum_{j=1}^{n} P_k = I_E$

を満たす。

定理 1.4. 線型空間 E 上の線形変換 $P_1, P_2, \cdots, P_n \ (n \geq 2)$ が与えられ、上の $P1). \ P2).$ を満たすならば、

$$E = \bigoplus_{j=1}^{n} Im \, P_j$$

で、P_k は $\bigoplus_{j \neq k} Im \, P_j$ に平行な $Im \, P_k$ への射影作用素である。

練習問題 1.3. *Banach*空間 E の有限次元の線形部分空間 M は、E のノルム位相で、閉集合になることを示せ。

定理 1.5. M, N を *Banach*空間 E の閉部分空間とするとき、$E = M \oplus N$ を満たすならば、直和分解に対応する射影作用素 P, Q が存在し、P, Q は有界線形作用素である。

定理 1.6. M, N_1, N_2 を $Banach$空間 E の閉部分空間とするとき、$E = M \oplus N_1$ かつ、$E = M \oplus N_2$ を満たすならば、N_1, N_2 は、$Banach$空間 として同型になる。

定理 1.7. E を $Banach$空間 とする。

1. M を E の線形部分空間とするとき、

$$M^\circ = \{\varphi \in E' \mid \varphi(v) = 0,\ \forall v \in M\}$$

とするとき、M° は E' の閉部分空間である。

2. N が E の有限次元線形部分空間であるとき、閉部分空間 M が存在して、$E = M \oplus N$ を満たす。

記録 by J.S